CONCOURS EXTERNE 1985 D'INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

EPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION : DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 6

Les deux problèmes, bien que traitant de sujets analogues sous des aspects différents, peuvent être résolus indépendamment. Le rigueur des raisonnements et la clarté de la présentation seront prises en compte dans la notation des copies.

PREMIER PROBLEME

Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions n et p munis des produits scalaires notés $\langle u , v \rangle_E$ et $\langle u, v \rangle_F$ et des normes associées notées $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$.

Soit φ une application linéaire de E vers F et ${}^t\varphi$ sa transposée.

1) Soient f et g les endomorphismes de E et F définis par $f = \frac{1}{p} \cdot {}^t\varphi \circ \varphi$ et $g = \frac{1}{n} \cdot \varphi \circ {}^t\varphi$. Montrer que f et g possèdent des vecteurs propres $\{a_i\}_{i = 1, n}$ et $\{b_j\}_{j = 1, p}$ qui forment des bases orthonormées de E et F.

2) Montrer que les valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i = 1, n}$ et $\{\mu_j\}_{j = 1, p}$ de f et g sont positives ou nulles.

3) On suppose désormais $n > p$ et $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_p > 0$. Montrer que, parmi les n vecteurs propres de f, il en existe p, soient $a_1, \ldots, a_p$, que l'on peut exprimer simplement à l'aide des $\{b_j\}$ et des $\{\mu_j\}$. Exprimer les valeurs propres correspondantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ à l'aide des $\{\mu_j\}$.

4) Que peut-on dire de $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$?

5) Soit q l'application de $F \to \mathbb{R}$ définie par $q(u) = \frac{1}{n} \cdot \| {}^t\varphi(u) \|_E^2$

a) montrer que q est une forme quadratique.

b) montrer qu'il existe un automorphisme de F noté r tel que $q(u) = \| r(u) \|_F^2$

c) trouver $S = \sup_{\substack{u \in F \\ u \neq 0_F}} \frac{q(u)}{\|u\|_F^2}$ et donner une valeur de u pour laquelle $q(u) = S \| u \|_F^2$

6) Soit h un endomorphisme de F et $p(u) = \langle u, h(u) \rangle_F$

a) montrer que p(u) peut s'écrire $\psi(u, u)$ où ψ est une forme bilinéaire symétrique de F que l'on déterminera. ψ est-elle définie positive ?

b) montrer que la maximisation de $\frac{p(u)}{q(u)}$ sur $F - \{0_F\}$ revient à la recherche de la plus grande valeur propre d'un endomorphisme de F que l'on déterminera.

DEUXIEME PROBLEME

Soit f une application continue de $[0,1] \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$. L'espace vectoriel E des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est muni de la structure d'espace euclidien par le produit scalaire

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_0^1 \alpha(x) \beta(x) \, dx$$

On notera $\| \ \|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit ψ l'endomorphisme de E défini par $\psi(\alpha)(x) = \int_c^1 f(x, y)\,\alpha(y)\,dy$

1) Soit $\beta \in E$; déterminer $\inf_{\alpha \in E} \{\|\alpha\|^2 - 2\langle \beta, \alpha \rangle\}$

2) Montrer que pour minimiser

$$H(\alpha, \beta) = \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - \alpha(x)\,\beta(y))^2\,dx\,dy$$

par rapport à α et β il faut maximiser $\dfrac{\|\psi(\beta)\|}{\|\beta\|}$ par rapport à β

3) Montrer l'existence de $\sup_{\substack{\beta \in E \\ \beta \neq 0_E}} \dfrac{\|\psi(\beta)\|}{\|\beta\|}$

4) On admet qu'il existe $\beta_0 \neq 0_E$ tel que $\sup_{\substack{\beta \in E \\ \beta \neq 0_E}} \dfrac{\|\psi(\beta)\|}{\|\beta\|} = \dfrac{\|\psi(\beta_0)\|}{\|\beta_0\|}$

déterminer $\inf_{\alpha, \beta \in E} H(\alpha, \beta)$ et α_0 tel que $\inf(H(\alpha, \beta)) = H(\alpha_0, \beta_0)$

5) Soit $g(x, y) = \int_0^1 f(t, x)\,f(t, y)\,dt$ et φ l'endomorphisme de E défini par

$\varphi(\alpha)(x) = \int_0^1 g(x, y)\,\alpha(y)\,dy$. On dira que $\alpha \in E - \{0_E\}$ est vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ si $\varphi(\alpha) = \lambda\alpha$

a) montrer que λ est positive ou nulle

b) montrer que si α et α' sont vecteurs propres de φ associés à deux valeurs propres différentes, $\langle \alpha, \alpha' \rangle = 0$

c) montrer que β_0 défini au 4) est vecteur propre de φ. Que peut-on dire des autres valeurs propres de φ ?

6) Soit $f(x, y) = \cos(a x - 2\pi y)$, $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer α_0, β_0 et $\inf_{\alpha, \beta}(H(\alpha, \beta))$

(On pourra poser $e_1(y) = \cos 2\pi y$, $e_2(y) = \sin 2\pi y$ et

$\beta = \lambda e_1 + \mu e_2 + r$ avec $\langle r, e_1 \rangle = \langle r, e_2 \rangle = 0$)